

Código: DQF1042025-24

Tema:

- Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas



As equações de Maxwell é um conjunto de equações diferenciais acopladas que descrevem o comportamento dos campos elétricos e magnéticos dada uma distribuição de cargas. Apesar de terem equações um pouco diferente uma da outra, o caráter acoplado das equações demonstra que tais campos podem se apresentar como uma só entidade, uma onda eletromagnética. Aqui vamos expor as equações de Maxwell, derivaremos brevemente as equações usando propriedades do cálculo vetorial, e discutiremos sobre a interpretação dos campos como onda.

Antes de tudo é importante definir rapidamente o que seriam os campos vetoriais e algumas propriedades importantes. Primeira, um campo vetorial é como uma função que define, em cada ponto do seu sistema de coordenada, um vetor (~~uma~~ um objeto com tamanho, sentido e direção). O cálculo diferencial que estuda tais objetos é o cálculo vetorial. Três operações fundamentais no cálculo vetorial são: o gradiente, a divergente e o rotacional.

De forma simplificada, podemos dizer que o gradiente mede a direção e a taxa de variação de uma função no sistema de coordenada; o divergente mede a quanto o campo vetorial "vai" de um ponto; e o rotacional mede a quanto o campo vetorial "roda".

Podemos definir um vetor (~~uma função~~) como:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z},$$

onde $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ são os vetores unitários do sistema de coordenada. No caso de campo vetorial, cada componente é uma função do sistema de coordenada,

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z) \hat{x} + a_y(x, y, z) \hat{y} + a_z(x, y, z) \hat{z}.$$

(Aqui é usada o sistema de coordenada cartesiana para simplificar a descrição, no entanto, podemos usar uma transformação de coordenada para descrever o problema no sistema de coordenada que preferir).

Os três operadores mencionados, podem ser escritos, em coordenadas cartesianas como

$$\cdot \vec{\nabla} \cdot f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} f \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} f \hat{z} ; \text{ (gradiente)} ;$$

$$\cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} a_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} a_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} a_z(x, y, z) ;$$

(divergente)

$$\cdot \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) \right\}_x = \frac{\partial}{\partial y} a_z(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} a_y(x, y, z) ;$$

(rotacional)

Algumas propriedades são:

$$\text{- Seja: } \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0 ;$$

(também) $\vec{\nabla} \times \vec{e} = 0 \Leftrightarrow \vec{e} = \vec{\nabla} \cdot \phi \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \phi) = 0 ;$

$$\text{- por última: } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} .$$

$$\text{(propriedade vetorial: } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \text{)} .$$

Agora, com tais ferramentas, podemos introduzir as equações de Maxwell e ~~obter~~ derivar o comportamento ondulatório dos campos elétrico e magnético.



As equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

As equações (1) e (2) descrevem os campos gerados pela densidade de carga / densidade de corrente. Por outro lado, as equações (3) e (4) são propriedades dos campos. Note que as equações (2) e (3) ~~mostram~~ mostram a relação dos campos elétricos e magnéticos.

Usando das propriedades definidos anteriormente e das equações (2) e (3), temos;

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \nabla \times \vec{J} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

onde ϵ_0 é a permissividade da vácuo e μ_0 é a suscetibilidade da vácuo. Comparando tais equações, com a equação de onda,

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \psi, \quad (7)$$

sendo ' v ' a velocidade de propagação da onda e ' ψ ' sua fonte. Uma vez que a onda é produzida e se propaga para longe da fonte o termo à direita da eq. (7) se torna nula.

Comparando a equação de onda com as equações obtidas a partir das equações de Maxwell, podemos interpretar que distribuições de cargas podem gerar ondas elétricas e magnéticas que se propagam com uma velocidade:

$$v = c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s};$$

Uma vez longe da fonte, os campos, ~~se~~ seguem as equações:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ e } \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0;$$

A solução mais simples para os campos é: $\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \cdot \hat{k}$, e introduzindo tal solução de volta na equação (3), obtemos: $\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \vec{B}$, ou seja, a onda

elétrica é acompanhada de uma onda ~~elétrica~~ magnética perpendicular.