

## EQUAÇÕES DE MAXWELL E ONDAS ELETROMAGNETICAS

As equações de Maxwell são quatro equações diferenciais que descrevem a relação entre cargas elétricas e correntes elétricas e os campos elétrico ( $\vec{E}$ ) e magnético ( $\vec{B}$ ) que eles criam. São nomeadas em homenagem a James Clark Maxwell que, apesar de ter contribuído somente uma metade de uma delas, impulsionou um avanço imenso para a área do eletromagnetismo, <sup>de modo</sup> que sua homenagem é amplamente merecida, como veremos.

Em meados do século 19, todos os fenômenos do eletromagnetismo eram perfeitamente descritos pela lei de Gauss, que afirma que a divergência do campo elétrico é igual a densidade de carga elétrica ( $\rho$ ) dividido pela permeabilidade elétrica ( $\epsilon$ ):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (1)$$

a lei de Gauss para o magnetismo, que afirma a ausência de monopolos magnéticos no universo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

a lei de Faraday, que estipula que o rotacional do campo ~~magnético~~ elétrico é igual e oposto à variação do campo magnético no tempo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

a lei de Ampère, que afirma que o rotacional do campo magnético é igual ao vetor densidade de corrente elétrica ( $\vec{j}$ ) vezes a permeabilidade magnética do meio ( $\mu$ ):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j}, \quad (4)$$

e a força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5)$$

que especifica a força eletromagnética subida por uma partícula com carga  $q$ , velocidade  $\vec{v}$ , e imerso em um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$  externos.

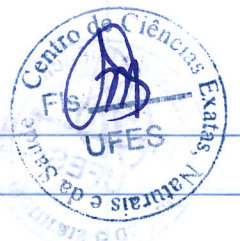
Resumindo, as equações (1) a (4) descrevem a formação de campos devido às cargas e a equação (5) descreve o movimento das cargas devido aos campos.

As equações (1) a (4) vão se tornar as equações de Maxwell, mas vamos focar na equação (4) em particular, por que essa, como Maxwell percebeu o primeiro, contém uma inconsistência.

Observando que a divergência de um rotacional é nulo, teríamos, aplicando a divergência à equação (4)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{j}) = \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

ou seja, a divergência da densidade de corrente deveria estar sempre zero. Mas isso não é verdade.



De fato a divergência da densidade de corrente é igual e oposto a variação da densidade de carga no tempo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que nada mais é que a expressão da conservação da carga. Utilizando a lei de Gauss (1), temos no caso geral

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\epsilon \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

onde utilizamos o fato que derivação em relação ao tempo e divergência comutam e supomos que  $\epsilon$  é uma constante.

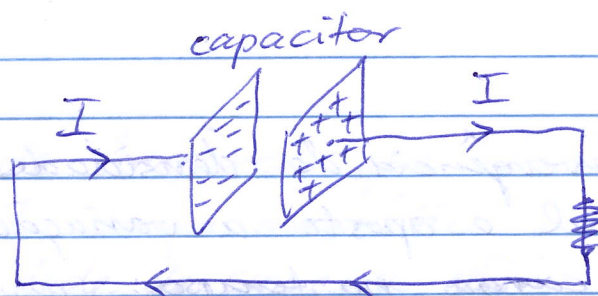
Logo podemos escrever

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Dessa maneira, a equação (4) se torna consistente se o termo da direita for acrescido por um termo proporcional à variação do campo elétrico no tempo. A nova lei de Ampère, agora chamada de Ampère-Maxwell é

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \left( \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (6)$$

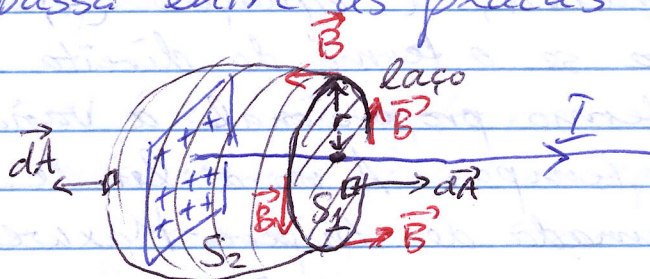
A inconsistência da equação (4) também pode ser colocada em evidência de maneira experimental. Vamos considerar um circuito de corrente contínua contendo um capacitor em fase de descarregamento, como mostrado abaixo:



Consideremos a lei de Ampère na sua forma integral, ou seja, a circulação do campo magnético ao longo de um laço fechado é igual à corrente líquida atravessando o laço (C) vezes a permeabilidade magnética

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu I = \mu \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

onde a superfície de integração (S) é de livre escolha do momento que seja limitada pelo laço C. Dentro das possibilidades vamos destacar uma superfície que "corta" o fio ( $S_1$ ) e outra que passa entre as placas ( $S_2$ ):



Integrando a densidade de corrente segundo a superfície  $S_1$ , temos efetivamente:

$$\oint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{A} = I \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi r B = \mu I \quad (7)$$

Entretanto, entre as placas não há corrente, logo teríamos integrando segundo  $S_2$

$$\iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$$

A inconsistência é resolvida se incluirmos o termo de Maxwell ( $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ), pois efetivamente há um campo elétrico variável no tempo entre as placas (enfraquecendo no caso do capacitor em descarregamento). Temos então

$$\mu \iint_S (\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{A} = \mu \epsilon \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ = \mu \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

onde  $\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$  é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície  $S$ .

Experimentalmente, o campo de Biot e Savart calculado na equação (4),  $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$ , também existe entre as placas, somente devido à variação no tempo do fluxo elétrico

$$B = \frac{\mu \epsilon}{2\pi r} \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Resumindo, Maxwell corrigiu a equação de Ampère e as equações completas são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu (\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (11)$$

Vamos agora considerar as equações de Maxwell no vácuo, ou seja, ~~na~~ ausência de cargas ( $\rho=0$ ) e correntes ( $\vec{j}=\vec{0}$ ), temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (15)$$

onde  $\mu_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \text{ SI}$  e  $\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-9} \text{ SI}$ .

Observe que as equações (12) a (15) apresentam uma certa simetria, ou seja, um campo magnético variável no tempo cria um campo elétrico (14) e um campo ~~mag~~ elétrico variável no tempo cria um campo magnético (15).

Vamos calcular o rotacional da equação (14), temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

onde permutamos as derivadas em relação ao tempo e ao espaço. Mas, com a equação (15), temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (16)$$

Pelo outro lado, o rotacional do rotacional é o gradiente da divergência menos o laplaciano,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (17)$$

Utilizando a lei de Gauss no vácuo, o primeiro termo da direita é nulo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

(17)

Comparando as equações (16) e (17), temos

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

(18)

Com um raciocínio similar partindo da equação (15) podemos mostrar que

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

(19)

As equações (18) e (19) são equações de onda dos campos elétrico e magnético, respectivamente! A velocidade de propagação dessa onda é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx \frac{1}{\left(\frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 9 \cdot 10^{-9}\right)^{1/2}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Ou seja, uma onda que se propaga com velocidade constante de trezentos mil quilômetros por segundo no vácuo. Essa onda é causada por fenômenos eletromagnéticos. A natureza dessa onda não foi difícil de encontrar, trata-se da luz! Experimentalmente, a velocidade da luz no vácuo é

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Também sabemos que a luz é capaz de atravessar o espaço vazio para chegar do sol e das estrelas até nós aqui na terra. A grande contribuição de Maxwell não foi a correção da lei de Ampère,



mas foi a unificação dos fenômenos ópticos com o eletromagnetismo. De fato, as ondas eletromagnéticas descritas pelas equações (18) e (19) descrevem não somente a luz, mas incluem todas as ondas infra-vermelhas, ultra-violetas, raios gama, micro-ondas e ondas de rádio e raios chis também.

Para caracterizar as ondas eletromagnéticas, vamos considerar as soluções de ondas planas das equações (18) e (19),

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda e  $\omega$  a frequência angular. Sem perda de generalidade, vamos considerar propagação na direção  $z$ , ou seja

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Temos então

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) \quad (20)$$

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad (21)$$

Aplicando a lei de Gauss no vácuo (4) à solução (20) e a lei de Gauss do magnetismo (13) à solução (21), temos

(3/3)

DQF1042025-27



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

mas como somente há variação na direção  $z$ , temos

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

entretanto, na ausência de cargas e correntes, não pode haver campos constantes não nulos, logo temos que os componentes  $E_z$  e  $B_z$ , ou seja, os componentes alinhados com a direção de propagação das ondas, são nulos. Em outras palavras, as ondas eletromagnéticas são de natureza transversal!

Para caracterizar a relação das soluções elétricas e magnéticas entre si, vamos introduzir as soluções (20) e (21) nas equações (14) e (15), respectivamente, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \cancel{\partial_y E_z} - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \cancel{\partial_x E_z} \\ \cancel{\partial_x E_y} - \cancel{\partial_y E_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \cancel{\partial_x B_z} \\ \cancel{\partial_x B_y} - \cancel{\partial_y B_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (23)$$



Sem perda de generalidade, vamos supor que o campo elétrico está alinhado com o eixo  $x$  e o campo magnético com o eixo  $y$ , temos

$$\vec{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{B}(z,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

As equações não triviais das equações (22) e (23) são

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -k E_0 \sin(kz - \omega t) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\omega B_0 \sin(kz - \omega t + \varphi) \quad (24)$$

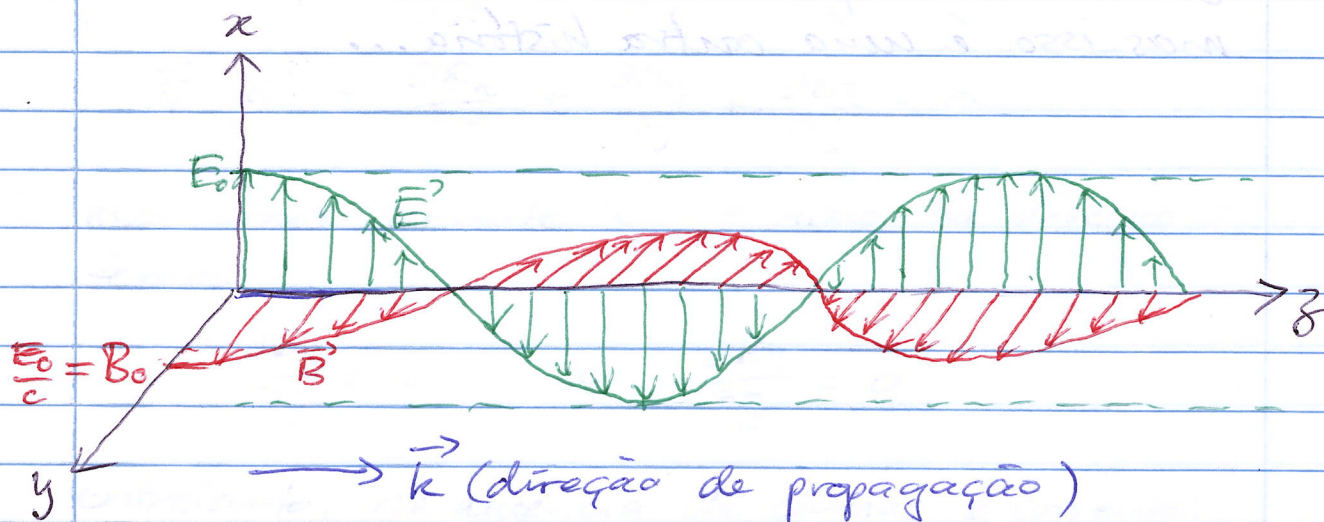
$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = k B_0 \sin(kz - \omega t + \varphi) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \omega E_0 \sin(kz - \omega t) \quad (25)$$

Comparando os termos da direita e da esquerda dessas equações (24) e (25), podemos concluir que

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c} \quad \text{e} \quad \varphi = 0$$

ou seja, a amplitude máxima do campo elétrico é igual à amplitude máxima do campo magnético vezes a velocidade da luz, e o fator de fase entre os campos elétrico e magnético é nulo. Em outras palavras, os campos elétrico e magnético atingem os máximos ao mesmo tempo.

Podemos então representar a onda eletromagnética pelo seguinte gráfico:



Resumindo, as equações de Maxwell (corrigidas), equações (8) a (11), descrevem perfeitamente a formação de campos elétricos e magnéticos devidos a cargas, correntes e campos elétricos e magnéticos variáveis no tempo. Junto com a equação da força de Lorentz, equação (5), todas as leis experimentais do eletromagnetismo incluindo as equações das ondas eletromagnéticas, como as do vácuo, (18) e (19), podem ser derivadas. A unificação dos fenômenos eletromagnéticos e da óptica também colocou a base para a relatividade restrita pela necessidade de transformações espacotemporais que admitem a propagação de uma onda com velocidade



constante independentemente do referencial,  
mas isso é uma outra história...

